Erinnerung: Für Mengen x und y setzen wir

$$
\begin{array}{ll}
x \preceq y & \text{falls eine injektive Funktion } x \hookrightarrow y \text{ existiert,} \\
x \sim y & \text{falls eine bijektive Funktion } x \xrightarrow{\sim} y \text{ existiert,} \\
x \prec y & \text{falls } x \preceq y \text{ und } x \not\sim y \text{ gilt.}
\end{array}
$$

Proposition: Die Relation $\preceq$ ist reflexiv und transitiv, und $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

Satz: *(Cantor-Bernstein)* Für alle x und y gilt $(x \preceq y \wedge y \preceq x) \longleftrightarrow x \sim y$.

Satz: Für alle x und y gilt $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

Proposition: Für jede Menge x sind äquivalent:

(a) x ist unendlich.

(b) Für alle $n \in \omega$ gilt $n \prec x$.

(c) Es existiert eine injektive Funktion $\omega \hookrightarrow x$.

(d) Es existiert eine surjektive Funktion $x \twoheadrightarrow \omega$.

(e) Es existiert eine injektive aber nicht bijektive Funktion $x \hookrightarrow x$.

(f) Es existiert eine surjektive aber nicht bijektive Funktion $x \twoheadrightarrow x$.

Bleibt zu zeigen (a) $\Rightarrow$ (b) Sei x unendlich, also $\neg\exists m \in \omega : m \sim x$.
Wäre $n \in \omega$ mit $n \not\prec x$, wäre $x \preceq n \Rightarrow x \overset{f}{\hookrightarrow} n$
$\Rightarrow x \sim \text{Bild}(f) \subseteq n \Rightarrow \exists m \leq n : \text{Bild}(f) \sim m \Rightarrow x \sim m$ $\Rightarrow$ Widerspruch.

(b) $\Rightarrow$ (c) Konstruiere $n \overset{f_n}{\hookrightarrow} x$ für alle $n \in \omega$.
$n = 0$: $n = \emptyset \hookrightarrow x$
f_n gegeben $\Rightarrow \exists y \in x \setminus \text{Bild}(f_n)$, setze f_n fort zu $f_{n+1} : S n = n+1 \to x$ durch $f_{n+1}(n) = y$.
$\Rightarrow f_{n+1}$ injektiv. Rekursive Konstruktion $\leadsto f : \omega \hookrightarrow x$ injektiv.

qed.

Kardinalzahlen

Man könnte versuchen, die Kardinalität einer beliebigen Menge x als die Äquivalenzklasse $\{y \mid y \sim x\}$ zu definieren. Dies ist aber keine Menge. Stattdessen konstruiert man ein Repräsentantensystem:

Definition: Eine Menge α heisst eine

(a) *Ordinalzahl*, falls gilt: $\forall \beta \in \alpha \colon \beta \subseteq \alpha$, und
$\in$ induziert eine strikte Wohlordnung auf α.

$\forall \alpha$ OZ. $\Rightarrow S\alpha$ OZ.
$= \alpha \cup \{\alpha\}$.

(b) *Kardinalzahl*, falls gilt: α ist eine Ordinalzahl, und
$\forall \beta \in \alpha \colon \beta \not\sim \alpha$

Bsp.: Jedes $n \in \omega$
ω

Satz: Für jede Menge x existiert genau eine Kardinalzahl α mit $x \sim \alpha$.

(ohne Beweis)

Definition: Dieses α heisst die *Kardinalität von x*, geschrieben $|x| := \alpha$.

Definition: Für je zwei Kardinalzahlen α und β setzen wir

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant \beta \quad &:\Longleftrightarrow \quad \alpha \preceq \beta, \\ \alpha < \beta \quad &:\Longleftrightarrow \quad \alpha \prec \beta. \end{aligned}$$

Proposition: Dies definiert eine Totalordnung.

Proposition: (a) Jedes $n \in \omega$ ist eine Kardinalzahl.

(b) Die Menge ω ist die kleinste unendliche Kardinalzahl.

Kardinalzahlarithmetik

Definition: Für je zwei Kardinalzahlen α und β setzen wir:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &:= \big|\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}\big| \\ \alpha \cdot \beta &:= |\alpha \times \beta| \\ \alpha^\beta &:= |{}^\beta\alpha| \end{aligned}$$

$\alpha \xrightarrow{\sim} \alpha \times \{0\}$

$x \longmapsto \langle x, 0\rangle$

$\beta \xrightarrow{\sim} \beta \times \{1\}$

$y \longmapsto \langle y, 1\rangle$

$\alpha \times \{0\} \cap \beta \times \{1\} = \emptyset.$

${}^\beta\alpha := \{\text{Funktionen } \beta \to \alpha\}.$

Proposition: Für je zwei Mengen x und y gilt:

$$\begin{aligned} |x \cup y| &= |x| + |y| \quad \text{falls } x \cap y = \emptyset \\ |x \times y| &= |x| \cdot |y| \\ |{}^y x| &= |x|^{|y|} \end{aligned}$$

Skizze.

$\alpha = |x| \rightsquigarrow x \xrightarrow{\sim} \alpha$

$\beta = |y| \rightsquigarrow y \xrightarrow{\sim} \beta$

$x \cup y \xrightarrow{\sim} \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$

$\Rightarrow |x \cup y| = |\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}| = \alpha + \beta.$

Proposition: Für alle Kardinalzahlen α, β, γ gilt:

$\alpha + \beta \;=\; \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta \;=\; \beta \cdot \alpha$	$\alpha^{\beta+\gamma} \;=\; \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma}$
$\alpha + (\beta + \gamma) \;=\; (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \;=\; (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	$(\alpha \cdot \beta)^{\gamma} \;=\; \alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$
$0 + \alpha \;=\; \alpha$	$1 \cdot \alpha \;=\; \alpha$	$\alpha^{\beta\gamma} \;=\; (\alpha^{\beta})^{\gamma}$
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) \;=\; \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	$0 \cdot \alpha \;=\; 0$	$\alpha^{0} \;=\; 1$
	$1 \;\neq\; 0$	$1^{\alpha} \;=\; 1$

$\alpha^0 = |{}^0\alpha|$

$= |\{\text{Fkt. } \emptyset \to \alpha\}|$

Skizze: $\alpha + \beta = |\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}|$

$\wr\wr$

$\beta + \alpha = |\beta \times \{0\} \cup \alpha \times \{1\}|$

$\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$

$\updownarrow$

$\beta \times \{0\} \cup \alpha \times \{1\}$

$\langle x, 0\rangle \quad \langle y, 1\rangle$

$\mapsto \quad \mapsto$

$\langle x, 1\rangle \quad \langle y, 0\rangle$.

$\boxed{\alpha^1 = \alpha}$

Proposition: Für alle Kardinalzahlen α, α', β mit $\alpha \leqslant \alpha'$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &\leqslant \alpha' + \beta \\
\alpha \cdot \beta &\leqslant \alpha' \cdot \beta \\
\alpha^{\beta} &\leqslant (\alpha')^{\beta} \\
\beta^{\alpha} &\leqslant \beta^{\alpha'}
\end{aligned}
$$

$\alpha \leq \alpha' \iff \exists f : \alpha \hookrightarrow \alpha'$

$(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\})$

$\downarrow \tilde{f}$

$(\alpha' \times \{0\} \cup \beta \times \{1\})$

$\Rightarrow \quad |\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}| = \alpha + \beta$

$\leq$

$|\alpha' \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}| = \alpha' + \beta$.

Eigenschaften endlicher Kardinalzahlen

Proposition: Für alle endlichen Kardinalzahlen α, β stimmen $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ und β^α, und $\alpha \leqslant \beta$ mit den früheren Definitionen überein.

Beweis: Induktion über β.

$\beta = 0 = \emptyset \Rightarrow |\alpha \times \{0\} \cup \underbrace{\beta \times \{1\}}_{\emptyset}| = |\alpha \times \{0\}| = \alpha$.

β beliebig $\Rightarrow S\beta = \beta \cup \{\beta\}$

$\alpha \times \{0\} \cup S\beta \times \{1\} = \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \cup \{\langle\beta, 1\rangle\}$.

disjunkt.

$\alpha + \beta =: \gamma \Rightarrow$ Bijektion $\gamma \xrightarrow{\sim} \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$

$\Rightarrow$ Bijektion $S\gamma = \gamma \cup \{\gamma\} \to \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \cup \{\langle\beta, 1\rangle\}$

$\Rightarrow \alpha + S\beta = |S\gamma| = S\gamma = S(\alpha + \beta)$.

Rest analog.

Proposition: Für alle endlichen Kardinalzahlen α, α', β mit $\alpha < \alpha'$ gilt:

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha + \beta & < & \alpha' + \beta & \\
\alpha \cdot \beta & < & \alpha' \cdot \beta & \text{falls } \beta > 0 \\
\alpha^\beta & < & (\alpha')^\beta & \text{falls } \beta > 0 \\
\beta^\alpha & < & \beta^{\alpha'} & \text{falls } \beta > 1
\end{array}
$$

Vgl. vorige Seite, hier f nicht bijektiv $\Rightarrow$
$\Rightarrow \tilde{f}$ nicht bijektiv.

Eigenschaften unendlicher Kardinalzahlen

Satz: Für jede unendliche Kardinalzahl α und jede Kardinalzahl β gilt:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \max\{\alpha, \beta\} && \checkmark \\
\alpha \cdot \beta &= \max\{\alpha, \beta\} && \text{falls } \beta > 0 \ \checkmark \\
\alpha^{\beta} &= \alpha && \text{falls } \beta > 0 \text{ endlich} \\
\beta^{\alpha} &= 2^{\alpha} && \text{falls } 1 < \beta \leqslant \alpha \ \cancel{\text{endlich}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Satz von Hessenberg (ohne Beweis): Für jede unendliche Menge } X \text{ gilt } X \times X \sim X.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\forall \alpha:\ \alpha \cdot \alpha = \alpha.}$

Bew.: (a) OBdA $\alpha \geq \beta$. Dann existiert eine Injektion $\alpha \hookrightarrow \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \Rightarrow \alpha \leq \alpha + \beta$.

Wähle Injektion $f: \beta \hookrightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \hookrightarrow \alpha \times \{0,1\} \Rightarrow \alpha + \beta \leq |\alpha \times \underbrace{\{0,1\}}_{2}| = \alpha \cdot 2 \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha$

$\langle x, 0 \rangle \longmapsto \langle x, 0 \rangle$

$\langle y, 1 \rangle \longmapsto \langle f(y), 1 \rangle$

$2 \leq \alpha$

Zusammen: $\alpha \leq \alpha + \beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha + \beta = \alpha = \max\{\alpha, \beta\}$.

(b) OBdA $\alpha \geq \beta \geq 1 \Rightarrow$ Wähle $y \in \beta \Rightarrow \alpha \hookrightarrow \alpha \times \beta$, $x \longmapsto \langle x, y \rangle \Rightarrow \alpha \leq |\alpha \times \beta| = \alpha \cdot \beta$.

$\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \alpha = \alpha$.

$\Rightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha = \max\{\alpha, \beta\}$.

(c) Induktion über β: $\beta = 1$: $\alpha^1 = \alpha$.

Ist $\alpha^\beta = \alpha$, ist $\alpha^{S\beta} = \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha^1 = \alpha \cdot \alpha = \alpha$

fertig nach Induktion.

(d) Beh.: $\alpha \leq 2^\alpha$ Beweis: $\alpha \hookrightarrow \{f \mid f: \alpha \to \{0,1\}\}$, $x \longmapsto f_x: y \mapsto \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$ $\Rightarrow \alpha \leq |{}^{\alpha}2| = 2^\alpha$. qed.

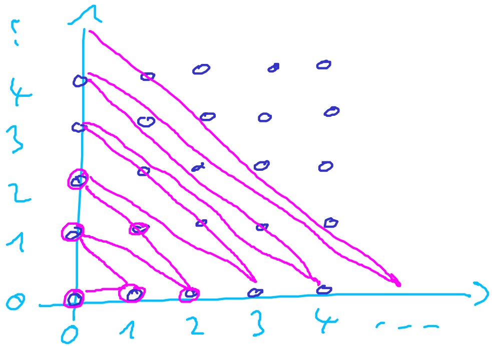
$\beta^\alpha \leq \alpha^\alpha \leq (2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha \cdot \alpha} = 2^\alpha \leq \beta^\alpha \Rightarrow \beta^\alpha = 2^\alpha$.

qed.

Beispiel: Explizite bijektive Abbildung

$$\omega \times \omega \xrightarrow{\sim} \omega, \quad (a, b) \mapsto \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b.$$

$\omega \times \omega$



Beispiel: Hilberts Hotel

(vgl. Analysis-Skript §1.4.7)

Satz: *(Cantor)* Für jede Menge x gilt $|x| < |\mathcal{P}(x)|$.

Bew.: Wenn nicht, ist $|\mathcal{P}(x)| \leq |x|$.

$\Rightarrow \exists$ Surjektion $f: x \to \mathcal{P}(x)$.

Sei $y \in x$ mit $f(y) = \{t \in x \mid t \notin f(t)\} \in \mathcal{P}(x)$

Dann ist $y \in f(y) \Longleftrightarrow y \notin f(y)$

$\leadsto$ Widerspruch! qed.

Proposition: Für jede Menge x gilt $|\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|}$.

Bew.: $\mathcal{P}(x) \xrightarrow{\sim} {}^{x}2 = \{\text{Funktionen } x \to \{0,1\}\}$

$x' \longmapsto f_{x'}: y \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in x' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. qed

Folge: Für jede Kardinalzahl α gilt $\alpha < 2^{\alpha}$.

Kontinuumshypothese (CH): Es gibt keine Kardinalzahl β mit $\omega < \beta < 2^{\omega}$.

Aleph

Bemerkung: Oft schreibt man $\aleph_0 := \omega$ und bezeichnet die nächst-grössere Kardinalzahl mit $\aleph_1$ und so weiter. Dann ist CH äquivalent zu $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

Bemerkung: Die Kontinuumshypothese ist unabhängig von ZFC.

Anwendung:

Satz: Je zwei Basen B, B' eines K-Vektorraums V haben dieselbe Kardinalität.

Folge: Die Dimension von V ist eine wohldefinierte Kardinalzahl:

$$\dim_K(V) \;:=\; |B|$$

Bew.: Bekannt falls B oder B' endlich. Seien also B, B' unendlich.

Für jedes $b' \in B'$ wähle Darstellung $b' = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i b_i$ mit $n \in \omega$, $\kappa_i \in K$, $b_i \in B$.

Betrachte die Funktion $t: B' \to \bigcup_{n \geq 0} B^n$, $b' \mapsto (b_1, \dots, b_n)$

Jedes $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$ taucht nur endlich oft als Bild $t(b')$ auf!

Denn ist $t(b') = (b_1, \dots, b_n)$, so ist $b' \in \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ = endliche Dimension $\leq n$.

also haben höchstens n verschiedene $b' \in B'$ dieses Bild.

$\Rightarrow B' \hookrightarrow \bigcup_{n \geq 0} n \times B^n$.

$|n \times B^n| \leq |B \times B^n| = |B|^{n+1} = |B|$. $\Rightarrow \exists\, n \times B^n \hookrightarrow B$

$\Rightarrow B' \hookrightarrow \omega \times B$.

$\Rightarrow |B'| \leq |\omega \times B| \leq |B \times B| = |B|$.

Analog $|B| \leq |B'|$

$\Rightarrow |B| = |B'|$. qed.